

ENSINO MÉDIO

PROBLEMA COM A MATEMÁTICA? SOLUÇÃO...



Capítulo 7

Inequações

Introdução

Uma equação pode ser resolvida ao realizarem-se operações equivalentes em ambos os lados, de forma a isolar a incógnita em um único lado da equação. Por exemplo, a equação

$$2x + 7 = 5x - 4$$

pode ser resolvida subtraindo-se $2x$ de ambos os lados e, em seguida, adicionando-se 4 a ambos os lados. Isto resulta na equação

$$11 = 3x$$

de onde a solução $x = \frac{11}{3}$ é obtida pela divisão de ambos os lados por 3.

Uma inequação como

$$2x + 7 < 5x - 4 \tag{1.1}$$

também pode ser resolvida pela aplicação de operações equivalentes em ambos os lados, sabendo-se que algumas operações podem inverter o "sentido" da inequação. Este primeiro capítulo estuda as várias técnicas que podem ser usadas para resolver os tipos de inequações encontradas em um curso de cálculo típico.

Em geral, as inequações encontradas no cálculo envolvem $f(x) = |x|$, a função valor absoluto, que vem explicada rapidamente aqui e, em capítulos posteriores.

Índice de Termos

Os seguintes termos, neste capítulo, têm conexão com o Dicionário do Maple; para mais informações vá em [Dicionário Matemático](#).

[abscissa](#)

[valor absoluto](#)

[inequação](#)

[interseção](#)

[intervalo não-negativo](#)

[intervalo aberto](#)

[positivo](#)

[reta real](#)

[subconjunto](#)

[união](#)

A Função Valor Absoluto $|x|$

A função [valor absoluto](#), escrita como

$$f(x) = |x|$$

é sempre uma quantidade [não-negativa](#). Por exemplo, o valor absoluto de -3 é o número positivo 3 .

A noção de que a mudança de -3 para 3 é dada pela simples "remoção do sinal de menos" obscurece a definição abstrata desta função.

É muito mais fácil ver a transição de -3 para 3 quando obtida pela multiplicação do número negativo -3 por -1 a fim de formar $+3$, o inverso aditivo de -3 . Portanto, a ação da função valor absoluto deve ser vista como

$$|-3| = 3 = 3 \quad (2.1)$$

ou seja, não ocorre simplesmente a queda do sinal de menos, mas o número negativo torna-se positivo pela introdução de um segundo sinal de menos. Vale a pena repetir.

Faça um número negativo positivo negando o número negativo

Conseqüentemente, a função valor absoluto envolve uma proposição de implicação condicional:

O valor absoluto de uma $\left\{ \begin{array}{l} \text{quantidade positiva é a própria quantidade} \\ \text{quantidade negativa é o } \textit{negativo} \text{ daquela quantidade} \end{array} \right.$

Então, por exemplo,

$$|5 - 3x|$$

o valor absoluto da quantidade $5 - 3x$, é simplesmente $5 - 3x$ para x que mantenha $5 - 3x$ positivo. Por outro lado,

$$|5 - 3x| = -(5 - 3x) = -5 + 3x$$

para x que mantenha $5 - 3x$ negativo. (Obviamente, se $x = \frac{5}{3}$ tal que $5 - 3x = 0$, então $|5 - 3x| = 0$.)

A Figura 7.0.1 dá um gráfico de $|5 - 3x|$.

À esquerda de $x = \frac{5}{3}$ (onde $5 - 3x$ é positiva), o gráfico mostra

$$|5 - 3x| = 5 - 3x$$

À direita de $x = \frac{5}{3}$ (onde $5 - 3x$ é negativa), o gráfico mostra

$$|5 - 3x| = -(5 - 3x) = -5 + 3x$$

Na direita em $x = \frac{5}{3}$ (onde $5 - 3x = 0$), o gráfico mostra $|5 - 3x| = 0$

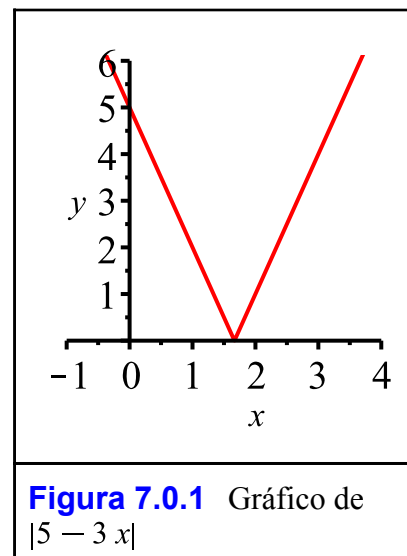


Figura 7.0.1 Gráfico de $|5 - 3x|$

No capítulo 8, o valor absoluto será descrito como um função *definida por partes*.

Problemas Típicos

Resolver cada uma das seguintes inequações.

1. $2x - 3 < 5$

2. $|2x - 3| < 5$

3. $|2x - 3| < |5x - 4|$

4. $5 \leq |6x - 1|$

5. $\frac{2}{x} - 1 \leq 7$

6. $\left| \frac{2}{x} - 1 \right| \leq 7$

7. $\left| \frac{2}{x} - 1 \right| < |5x + 8|$

8. $5 \leq \left| \frac{2}{x} - 1 \right|$

9. $3 < 2x - 3 < 7$

10. $3 < \left| \frac{2}{x} - 1 \right| < 7$

Note que os problemas 1 - 8 são da forma $f(x) < g(x)$ ou $f(x) \leq g(x)$, enquanto os problemas 9 até 10 são da forma $a < f(x) < b$.

Inicializações do Maple

Antes de acessar a versão do Maple para as soluções do problemas típicos apresentados acima, inicialize o Maple apertando o botão à direita.

Inic...

Soluções

Problema 7.1

7.1 - Solução Matemática

A inequação

$$2x - 3 < 5$$

pode ser resolvida de forma semelhante a como resolveríamos a equação $2x - 3 = 5$. Se 3 for adicionado a cada lado da inequação, esta é preservada. Portanto, o primeiro passo seria

$$\begin{array}{r} 2x - 3 < 5 \\ + 3 = + 3 \\ \hline \end{array}$$

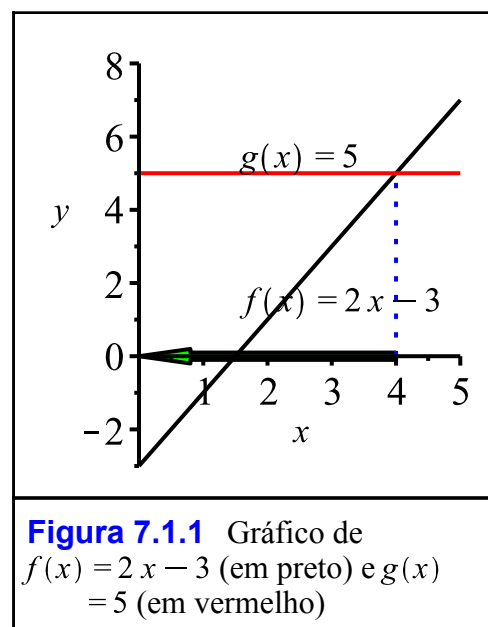
$$2x < 8$$

de onde

$$x < \frac{8}{2} = 4$$

segue. este caso, a divisão pelo número positivo 2 preserva a inequação. Desta forma, obtém-se a solução $x < 4$.

A Figura 7.1.1 destaca o conjunto de solução $\{x < 4\}$ com uma seta verde. Estes são os valores de x para os queias o gráfico de $f(x)$ está abaixo do gráfico de $g(x)$.



▼ 7.1 - Solução via Maplet

A inequação

$$2x - 3 < 5$$

pode ser resolvida com o [Tutorial Inequações #1](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 7.1.2.

O lado esquerdo da inequação é inserido como $f(x)$ e o lado direito como $g(x)$. Entre estas duas funções há botões de seleção, para a escolha da forma apropriada da inequação.

Clicando no botão **Gráfico** gera o gráfico de $f(x)$ (em preto), e $g(x)$ (em vermelho). O botão **Opções de Gráficos** nos permite controlar os eixos do gráfico.

Graficamente, a solução da inequação apresentada consiste nos valores de x para os quais a linha preta (ou seja, $f(x)$) encontra-se abaixo da linha vermelha (ou seja, $g(x)$). Visivelmente, esta encontra-se à esquerda da interseção entre as duas retas.

Ao clicar-se sobre o botão **Interseções**, obtém-se $x = 4$, a abscissa do ponto de interseção.

Ao clicar-se sobre o botão **Resolver**, é gerada a solução da inequação na forma de um intervalo, ou seja,

$$(-\infty, 4)$$

que é equivalente a $-\infty < x < 4$.

Para iniciar o **Tutorial Inequações #1**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Inequações #1](#).

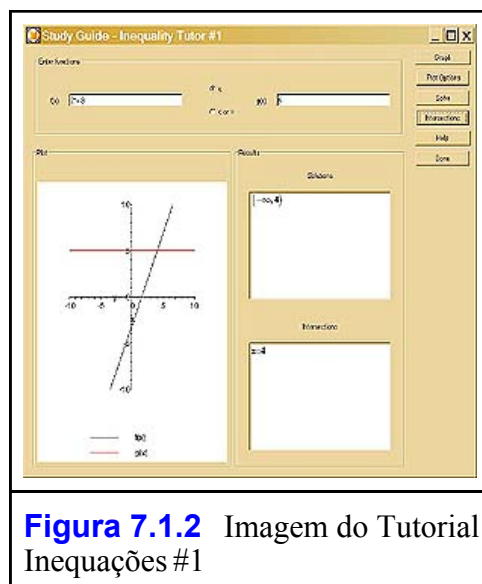


Figura 7.1.2 Imagem do Tutorial Inequações #1

▼ 7.1 - Solução Interativa

Insira os dados para o problema	
- Insira o lado esquerdo da inequação. - Menu de Contexto: Associe a um Nome $> f$	
- Insira o lado direito da inequação. - Menu de Contexto: Associe a um Nome $> g$	

Insira e resolva a inequação	
• Escreva a inequação $f < g$ • Menu de Contexto: Resolver > Resolver	
Calcule a coordenada x da interseção	
• Escreva a igualdade $f = g$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Resolver > Resolver	
Obtenha a Figura 7.1.1	
• Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos Faça $0 \leq x \leq 5$ • Arraste e solte o número 5 no gráfico de $f(x)$	

▼ 7.1 - Solução via Comandos do Maple

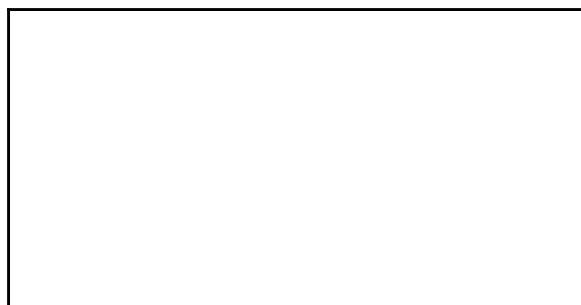
Associe o lado esquerdo da inequação ao nome f	> $f := 2x - 3$
Associe o lado direito da inequação ao nome g	> $g := 5$
Resolva a inequação.	> $solve(f < g, \{x\})$
Resolva a interseção de $f(x)$ e $g(x)$	> $solve(f = g, x)$
Obtenha a Figura 7.1.1	> $plot([f, g], x = 0..5, color = [black, red])$

▼ Problema 7.2

▼ 7.2 - Solução Matemática

A inequação

$|2x - 3| < 5$
pode ser resolvida pela interpretação da função valor absoluto de acordo com sua definição. Portanto, onde $2x - 3$ é positiva, $|2x - 3|$ pode ser substituída por $2x - 3$ e a inequação acima é representada por



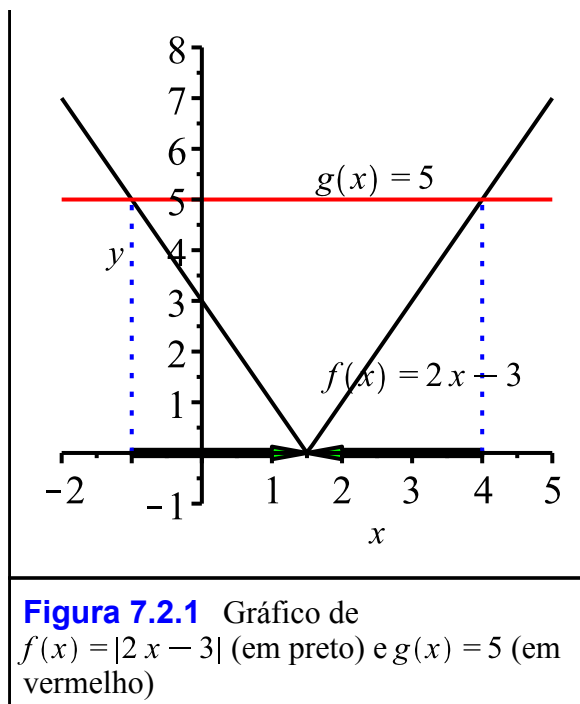
$$2x - 3 < 5$$

No entanto, onde $2x - 3$ é negativa, $|2x - 3|$ deve ser substituída por $-(2x - 3)$ de forma que a inequação dada é representada por

$$-(2x + 3) < 5$$

Esta inequação pode ser simplificada em

$$2x + 3 > -5$$



ao multiplicar-se toda a inequação por -1 , o que inverte o sentido do sinal da inequação. Logo, as duas inequações resultantes podem ser combinadas na forma:

$$-5 < 2x - 3 < 5$$

que pode ser resolvida adicionando-se, inicialmente, 3 a cada um dos três membros da inequação, como é mostrado a seguir.

$$\begin{array}{rcl} -5 < 2x - 3 < 5 \\ +3 & = & +3 \quad = \quad +3 \end{array}$$

$$-2 < 2x < 8$$

Então, a variável x no "centro" pode ser isolada dividindo-se cada membro da inequação por 2, um número positivo, de forma a não alterar o sinal das inequações. Disto, resulta a solução

$$-1 < x < 4$$

Alternativamente, o conjunto solução pode ser expresso como o intervalo aberto $(-1, 4)$.

A Figura 7.2.1 destaca o conjunto solução $\{-1 < x < 4\}$ com setas verdes. Estes são os valores de x para os quais o gráfico de $f(x)$ está abaixo do gráfico de $g(x)$.

7.2 - Solução via Maplet

A inequação

$$|2x - 3| < 5$$

pode ser resolvida através do [Tutorial Inequações #1](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 7.2.2.

O lado esquerdo da inequação é inserido como $f(x)$ e o lado direito como $g(x)$. Entre estas duas funções encontram-se os botões de seleção, para a escolha da forma apropriada de inequação.

Clicando no botão **Gráfico** gera o gráfico de $f(x)$ (em preto), e $g(x)$ (em vermelho).

O botão **Opções de Gráficos** nos permite controlar os eixos do gráfico.

Graficamente, a solução da inequação apresentada consiste nos valores de x para os quais a linha preta (ou seja $f(x)$) encontra-se abaixo da linha vermelha (ou seja, $g(x)$). Claramente, isto ocorre entre as interseções.

Ao clicar-se sobre o botão **Interseções**, obtém-se $x = -1, 4$, as abscissas dos pontos de interseção.

Ao clicar-se sobre o botão **Resolver**, é gerada a solução da inequação, dada pelo intervalo aberto

$$(-1, 4)$$

que é equivalente a $-1 < x < 4$.

Para iniciar o **Tutorial Inequações #1**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Inequações #1](#).

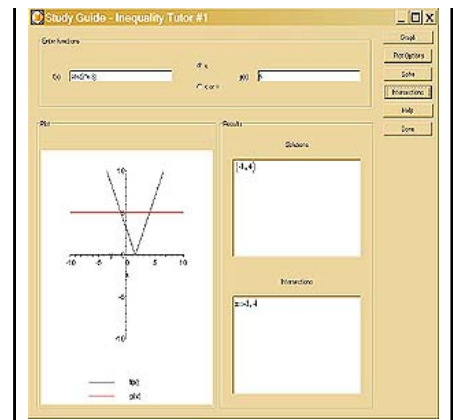


Figura 7.2.2 Imagem do Tutorial Inequações #1

▼ 7.2 - Solução Interativa

Insira os dados para o problema	
• Insira o lado esquerdo da inequação. O modelo valor absoluto pode ser encontrado na paleta Layout, ou pode ser inserida do teclado usando a barra vertical: • Menu de Contexto: Associe a um Nome $> f$	
• Insira o lado direito da inequação. • Menu de Contexto: Associe a um Nome $> g$	

Insira e resolva a inequação	
• Escreva a inequação $f < g$ • Menu de Contexto: Resolver > Resolver	
Calcule a coordenada x da interseção	
• Escreva a equação $f = g$ • Menu de Contexto: Resolver > Resolver	
Obtenha a Figura 7.2.1	
• Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos Coloque $-2 \leq x \leq 5$ • Arraste e solte o número 5 no gráfico de $f(x)$	

▼ 7.2 - Solução via Comandos do Maple

Associe o lado esquerdo da inequação ao nome f	> $f := 2x - 3 $
Associe o lado direito da inequação ao nome g	> $g := 5$
Resolva a inequação.	> $\text{solve}(f < g, \{x\})$
Resolva a interseção $f(x)$ e $g(x)$	> $\text{solve}(f = g, x)$
Obtenha a Figura 7.2.1	> $\text{plot}([f, g], x = -2 .. 5, color = [black, red])$

▼ Problema 7.3

▼ 7.3 - Solução Matemática

A inequação

$$f(x) = |2x - 3| < |5x - 4| = g(x)$$

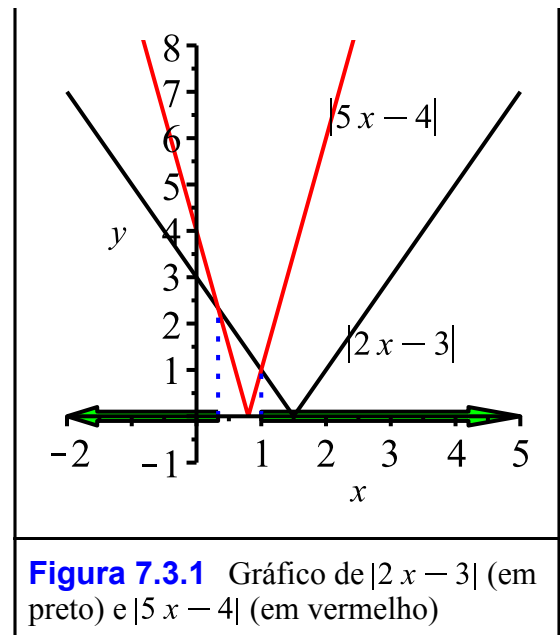
pode ser resolvida analiticamente se as funções valor absoluto em ambos os lados da inequação forem interpretadas de acordo com a definição. Isto significa que existem quatro casos a serem considerados, dependendo de se $F(x) = 2x - 3$



e $G(x) = 5x - 4$ são positivas ou negativas.

Portanto, existem quatro casos a considerar:

	$F(x) = 2x - 3$	$G(x) = 5x - 4$
Caso 1	Positivo	Positivo
Caso 2	Positivo	Negativo
Caso 3	Negativo	Positivo
Caso 4	Negativo	Negativo



▼ Caso 1: $F(x)$ Positiva, $G(x)$ Positiva

Os valores de x para os quais $F(x)$ é positiva satisfazem a condição $x > 3/2$ e encontram-se no intervalo $(3/2, \infty)$.

Os valores de x para os quais $G(x) = 5x - 4$ é positiva satisfazem a condição $x > \frac{4}{5}$ e encontram-se no intervalo $\left(\frac{4}{5}, \infty\right)$.

Os valores de x para os quais ambas, $F(x)$ e $G(x)$, são positivas encontram-se na interseção destes dois intervalos e, portanto, em $(3/2, \infty)$.

Se ambas, $F(x)$ e $G(x)$, forem positivas, então a inequação

$$|2x - 3| < |5x - 4|$$

se torna

$$2x - 3 < 5x - 4$$

cuja solução pode ser obtida subtraindo-se $2x$ de cada lado da inequação e adicionando-se 4 a cada lado, resultando em

$$\begin{array}{r} 2x - 3 < 5x - 4 \\ -2x + 4 = -2x + 4 \\ \hline 1 < 3x \end{array}$$

al que $x > \frac{1}{3}$. Porém, nem todos os valores de x são válidos. Apenas aqueles que se encontram no intervalo $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$ podem ser considerados. Portanto, para o caso em que ambas, $F(x)$ e $G(x)$, são positivas, a solução da inequação

$$|2x - 3| < |5x - 4|$$

são todos os valores de x no intervalo $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

▼ Caso 2: $F(x)$ Positiva, $G(x)$ Negativa

Os valores de x para os quais $F(x) = 2x - 3$ é positiva satisfazem a condição $x > \frac{3}{2}$ e encontram-se no intervalo $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Os valores de x para os quais $G(x) = 5x - 4$ é negativa satisfazem a condição $x < \frac{4}{5}$ e encontram-se no intervalo $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right)$.

Os valores de x que satisfazem ambas as condições encontram-se na interseção destes dois intervalos, que é vazia. Neste caso, nenhum valor de x satisfaz ambas as condições e nenhum trabalho adicional é necessário.

▼ Caso 3: $F(x)$ Negativa, $G(x)$ Positiva

Os valores de x para os quais $F(x) = 2x - 3$ é negativa satisfazem a condição $x < \frac{3}{2}$ e encontram-se no intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$.

Os valores de x pra os quais $G(x) = 5x - 4$ é positiva satisfazem a condição $x > \frac{4}{5}$ e encontram-se no intervalo $\left(\frac{4}{5}, \infty\right)$.

Os valores de x que satisfazem ambas as condições encontram-se na interseção destes dois intervalos e, portanto, em $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{2}\right)$.

Neste intervalo, a inequação

$$|2x - 3| < |5x - 4|$$

se torna

$$-(2x - 3) < 5x - 4$$

ou

$$-2x + 3 < 5x - 4$$

A solução para esta inequação pode ser obtida adicionando-se $2x + 4$ a cada lado, resultando em

$$\begin{array}{r} -2x + 3 < 5x - 4 \\ 2x + 4 = 2x + 4 \\ \hline 7 < 7x \end{array}$$

tal que $x > 1$. Porém, nem todos os valores de x são válidos. Apenas aqueles contidos no intervalo $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{2}\right)$ podem ser considerados. Portanto, para o caso $F(x) < 0$ e $G(x) > 0$, a solução da inequação

$$|2x - 3| < |5x - 4|$$

são todos os valores de x contidos no intervalo $(1, 3/2)$.

▼ Caso 4: $F(x)$ Negativa, $G(x)$ Negativa

Os valores de x para os quais $f(x) = 2x - 3$ é negativa satisfazem a condição $x < \frac{3}{2}$ e encontram-se no intervalo $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$.

Os valores de x para os quais $g(x) = 5x - 4$ é negativa satisfazem a condição $x < \frac{4}{5}$ e encontram-se no intervalo $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right)$.

Os valores de x para os quais ambos $f(x)$ e $g(x)$ são negativos estão na interseção destes dois intervalos e portanto ficam em $(-\infty, 4/5)$.

Se ambos $f(x)$ e $g(x)$ são negativos, então a inequação

$$|2x - 3| < |5x - 4|$$

se torna

$$-(2x - 3) < -(5x - 4)$$

ou

$$-2x + 3 < -5x + 4$$

A solução para esta inequação pode ser obtida adicionando-se $5x$ a cada lado, e subtraindo 3 de cada lado. Isto resulta em:

$$\begin{array}{r} -2x + 3 < -5x + 4 \\ 5x - 3 = 5x - 3 \\ \hline 3x < 1 \end{array}$$

tal que $x < 1/3$. Mas nem todos os valores de x são válidos. Apenas aqueles no intervalo $(-\infty, 4/5)$ podem ser considerados. Portanto, para o caso quando ambos $f(x)$ e $g(x)$ são negativos, a solução da inequação

$$|2x - 3| < |5x - 4|$$

consiste nos valores de x no intervalo $(-\infty, 1/3)$.

O Caso 1 apresenta como resposta o intervalo $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$, enquanto o Caso 3 fornece o intervalo $\left(1, \frac{2}{3}\right)$. Como $x = \frac{2}{3}$ satisfaz a inequação original (ou seja, $0 < \left|-\frac{2}{3}\right|$), estes dois casos resultam no conjunto solução $(1, \infty)$. A solução completa da inequação original é, portanto

$$(-\infty, 1/3) \cup (1, \infty)$$

Figura 7.3.1 destaca o conjunto solução $(-\infty, 1/3) \cup (1, \infty)$ com setas verdes. Estes são os valores de x para os quais o gráfico de $f(x) = |F(x)|$ está abaixo de do gráfico de $g(x) = |G(x)|$.

7.3 - Solução via Maplet

A inequação

$$|2x - 3| < |5x - 4|$$

pode ser resolvida através do [Tutorial Inequações #1](#)

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 7.3.2.

O lado esquerdo da inequação é inserido como $f(x)$, enquanto o lado direito é inserido como $g(x)$. Entre estas duas funções, há botões de seleção para a escolha da forma apropriada para a inequação.

Clicando no botão **Gráfico** gera o gráfico de $f(x)$ (em preto), e $g(x)$ (em vermelho). O botão **Opções de Gráficos** nos permite controlar os

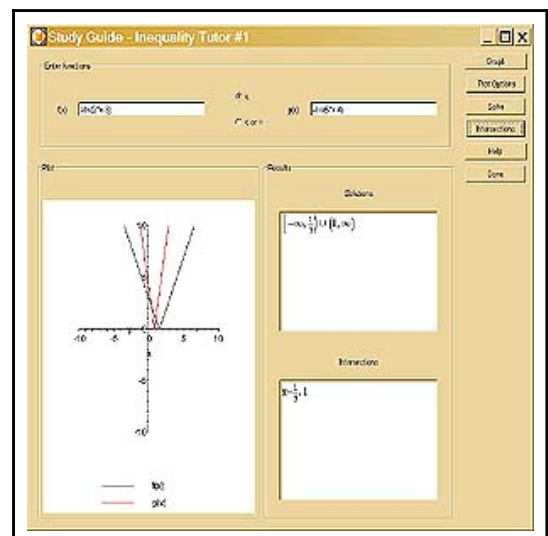


Figura 7.3.2 Imagem do Tutorial Inequações #1

eixos do gráfico.

Graficamente, a solução da inequação apresentada consiste nos valores de x para os quais a linha preta (ou seja, $f(x)$) encontra-se abaixo da linha vermelha (ou seja, $g(x)$). Visivelmente, esta encontra-se à esquerda da interseção entre as duas retas.

Ao clicar-se sobre o botão **Interseções**, obtém-se $x = \frac{1}{3}$, 1, as abscissas dos pontos de interseção.

Ao clicar-se sobre o botão **Resolver**, obtém-se a solução da inequação na forma de uma união de intervalos, isto é,

$$(-\infty, 1/3) \cup (1, \infty)$$

Para iniciar o **Tutorial Inequações #1**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Inequações #1](#).

▼ 7.3 - Solução Interativa

Insira os dados para o problema	
• Insira o lado esquerdo da inequação. O modelo valor absoluto pode ser encontrado na paleta Layout, ou pode ser inserida do teclado usando a barra vertical: • Menu de Contexto: Associe a um Nome > f	
• Insira o lado direito da inequação. • Menu de Contexto: Associe a um Nome > g	
Insira e resolva a inequação	
• Escreva a inequação $f < g$ • Menu de Contexto: Resolver > Resolver	
Calcule a coordenada x da interseção	
• Escreva a equação $f = g$ • Menu de Contexto: Resolver > Resolver	
Obtenha Figura 7.3.1	
• Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos Coloque $-2 \leq x \leq 5$	

- Arraste e solte a expressão para $g(x)$ no gráfico de $f(x)$

7.3 - Solução via Comandos do Maple

Associe o lado esquerdo da inequação ao nome f	> $f := 2x - 3 $
Associe o lado direito da inequação ao nome g	> $g := 5x - 4 $
Resolva a inequação.	> $\text{solve}(f < g, \{x\})$
Resolva a interseção $f(x)$ e $g(x)$	> $\text{solve}(f = g, x)$
Obtenha a Figura 7.3.1	> $\text{plot}([f, g], x = -2 .. 5, \text{color} = [\text{black}, \text{red}])$

Problema 7.4

7.4 - Solução Matemática

A inequação

$$5 \leq |6x - 1|$$

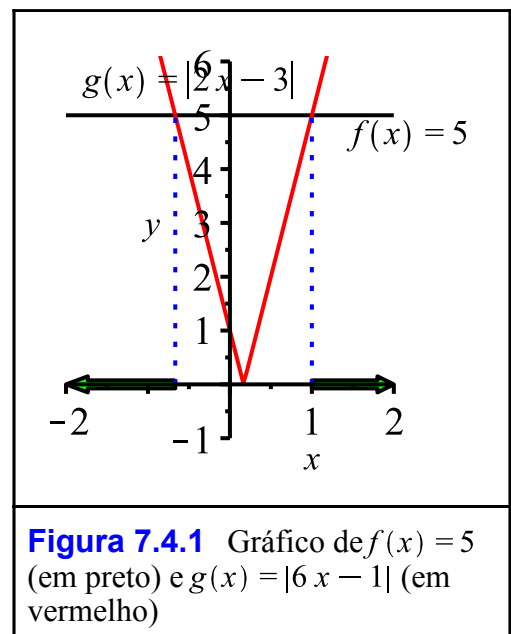
pode ser resolvida pela interpretação da função valor absoluto de acordo com sua definição. Portanto, onde $6x - 1$ for positivo, $|6x - 1|$ será substituído por $6x - 1$ e a inequação será dada por

$$5 \leq 6x - 1$$

Esta inequação, válida para $x > \frac{1}{6}$, ou seja, no

intervalo $\left(\frac{1}{6}, \infty\right)$, pode ser resolvida adicionando-se 1 a cada lado, resultando em $6 \leq 6x$, de onde segue que $x > 1$. A interseção do intervalo $[1, \infty)$ com $\left(\frac{1}{6}, \infty\right)$ resulta no intervalo $[1, \infty)$.

Onde $6x - 1$ é negativo, tem-se que $x < \frac{1}{6}$, $|6x - 1|$ deve ser substituído por $-(6x - 1)$, de forma que a inequação apresentada torna-se



$$5 \leq -(6x - 1)$$

ou

$$5 \leq -6x + 1$$

Esta inequação pode ser resolvida subtraindo-se 1 de cada lado, de forma a obter-se $4 \leq -6x$. A fim de isolar x , deve-se dividir a inequação por -6 , o que inverterá o sinal da equação e resultará em $x \leq -\frac{2}{3}$, correspondente ao intervalo $(-\infty, -\frac{2}{3}]$.

O conjunto solução para a inequação original é, portanto, a união dos intervalos $(-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [1, \infty)$ sobre a reta real.

Figura 7.4.1 destaca o conjunto solução $(-\infty, -2/3] \cup [1, \infty)$ com setas verdes. Estas são os valores de x para os quais o gráfico de $f(x)$ está abaixo do gráfico de $g(x)$.

7.4 - Solução via Maplet

A inequação

$$5 \leq |6x - 1|$$

pode ser resolvida pelo [Tutorial Inequações #1](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 7.4.2.

O lado esquerdo da inequação é inserido como $f(x)$, enquanto o lado direito é inserido como $g(x)$. Entre estas duas funções, há botões de seleção para a escolha da forma apropriada para a inequação.

Clicando no botão **Gráfico** gera o gráfico de $f(x)$ (em preto), e $g(x)$ (em vermelho). O botão **Opções de Gráficos** nos permite controlar os eixos do gráfico.

Graficamente, a solução da inequação apresentada consiste nos valores de x para os quais a linha preta (ou seja, $f(x)$) encontra-se abaixo da linha vermelha (ou seja, $g(x)$). Visivelmente, esta encontra-se à esquerda da interseção entre as duas retas.

Clicando-se sobre o botão **Interseções**, obtém-se $x = -\frac{2}{3}$, 1, as abscissas dos pontos de interseção.

Clicando-se sobre o botão **Resolver**, obtém-se a solução da inequação na forma de uma união de intervalos, isto é,

$$(-\infty, -2/3] \cup [1, \infty)$$

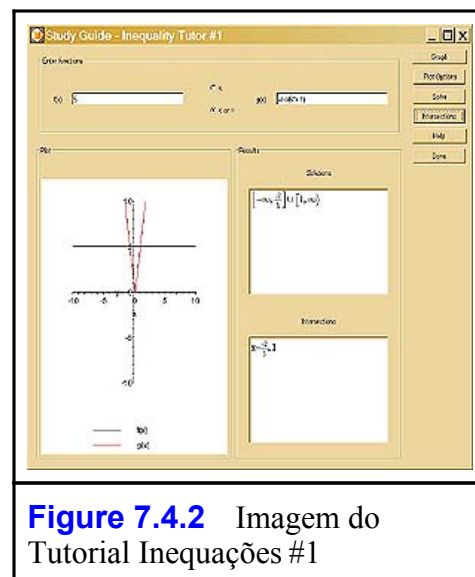


Figure 7.4.2 Imagem do Tutorial Inequações #1

Para iniciar o **Tutorial Inequações #1**, deve-se clicar sobre o link a seguir: [Tutorial Inequações #1](#).

▼ 7.4 - Solução Interativa

Insira os dados para o problema	
• Insira o lado esquerdo da inequação. • Menu de Contexto: Associe a um Nome $>f$	
• Insira o lado direito da inequação. O modelo valor absoluto pode ser encontrado na paleta Layout, ou pode ser inserida do teclado usando a barra vertical: • Menu de Contexto: Associe a um Nome $>g$	
Insira e resolva a inequação	
• Escreva a inequação $f \leq g$ • Menu de Contexto: Resolver $>$ Resolver	
Calcule a coordenada x da interseção	
• Escreva a equação $f = g$ • Menu de Contexto: Resolver $>$ Resolver	
Obtenha Figura 7.4.1	
• Digite g e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos $>$ Construtor de Gráficos Coloque $-2 \leq x \leq 2$ • Arraste e solte o número 5 no gráfico de $g(x)$	

▼ 7.4 - Solução via Comandos do Maple

Associe o lado esquerdo da inequação ao nome f	$> f := 5$
Associe o lado direito da inequação ao nome g	$> g := 6x - 1 $
Resolva a inequação.	$> solve(f \leq g, \{x\})$

Resolva a interseção $f(x)$ e $g(x)$	> <code>solve(f=g, x)</code>
Obtenha Figura 7.4.1	> <code>plot([f, g], x=-2..2, y=-1..6, color=[black, red])</code>

▼ Problema 7.5

▼ 7.5 - Solução Matemática

Para resolver a inequação

$$\frac{2}{x} - 1 \leq 7$$

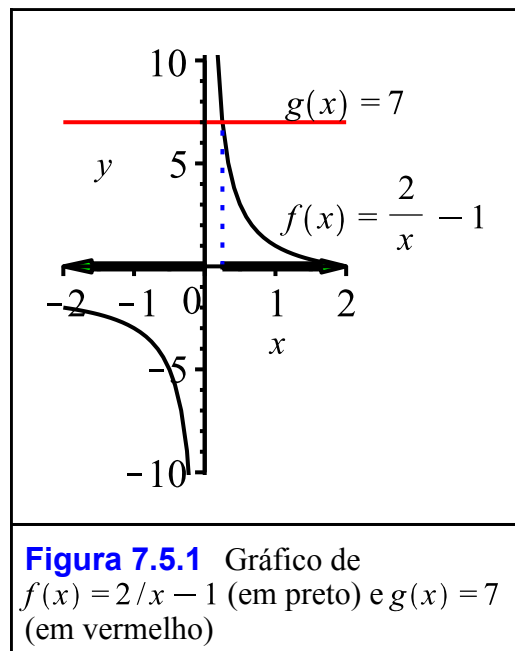
deve-se, inicialmente, adicionar 1 a cada lado da equação a fim de obter-se

$$\frac{2}{x} \leq 8$$

ou, ainda

$$\frac{1}{x} \leq 4$$

se ambos os lados da inequação forem divididos por 2. Se fosse uma equação, o próximo passo seria multiplicar ambos os lados por x . No entanto, se x for negativo, isto inverterá o sentido do sinal da inequação. Portanto, pode-se distinguir, ainda, dois casos.



▼ Caso 1: x Positivo

Se x é positivo, então a inequação $\frac{1}{x} \leq 4$ torna-se $1 \leq 4x$ pela multiplicação de ambos os lados por x . Portanto, a solução desta inequação é dada por $x > \frac{1}{4}$, ou pelo intervalo $[\frac{1}{4}, \infty)$. A interseção deste intervalo com o intervalo $(0, \infty)$ resulta, novamente, no intervalo $[\frac{1}{4}, \infty)$.

▼ Caso 2: x Negativo

Se x é negativo, então a inequação $\frac{1}{x} \leq 4$ torna-se $1 \geq 4x$ pela multiplicação de ambos

o lado por x . Portanto, a solução desta inequação é dada por $x \leq \frac{1}{4}$, ou pelo intervalo $[-\infty, \frac{1}{4})$. A interseção deste intervalo com o intervalo $(-\infty, 0)$ é o intervalo $(-\infty, 0)$

O conjunto solução completo é a união dos intervalos $(-\infty, 0) \cup [\frac{1}{4}, \infty)$ sobre a reta real. Figura 7.5.1 destaca o conjunto solução $(-\infty, 0) \cup [1/4, \infty)$ com setas verdes. Estes são os valores de x para os quais o gráfico de $f(x)$ está abaixo do gráfico de $g(x)$.

7.5 - Solução via Maplet

A inequação

$$\frac{2}{x} - 1 \leq 7$$

pode ser resolvida com a ajuda do [Tutorial Inequações #1](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 7.5.2.

O lado esquerdo da inequação é inserido como $f(x)$ e o lado direito como $g(x)$. Entre estas duas funções há botões de seleção, para a escolha da forma apropriada da inequação.

Clicando no botão **Gráfico** gera o gráfico de $f(x)$ (em preto), e $g(x)$ (em vermelho).

O botão **Opções de Gráficos** nos permite controlar os eixos do gráfico.

Graficamente, a solução da inequação dada consiste nos valores de x para os quais a linha preta (ou seja, $f(x)$) encontra-se abaixo da linha vermelha ou nos pontos de interseção com esta (ou seja, $g(x)$). Claramente, isto ocorre à esquerda do eixo y e na interseção da curva com a linha horizontal e a sua direita.

Ao clicar-se sobre o botão **Interseções**, obtém-se $x = \frac{1}{4}$, a abscissa do ponto de interseção.

Ao clicar-se sobre o botão **Resolver**, obtém-se a solução da inequação na forma de uma união de intervalos, isto é,

$$(-\infty, 0) \cup [1/4, \infty)$$

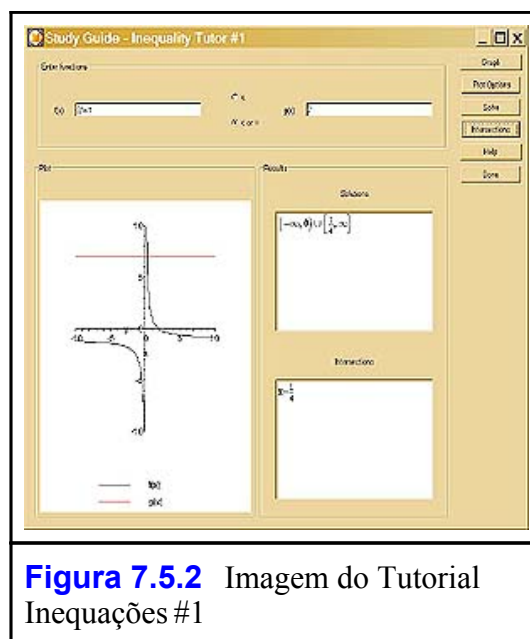


Figura 7.5.2 Imagem do Tutorial Inequações #1

(A assíntota vertical em $x = 0$ gera o intervalo aberto à esquerda.)

Para iniciar o **Tutorial Inequações #1**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Inequações #1](#).

▼ 7.5 - Solução Interativa

Insira os dados para o problema	
• Insira o lado esquerdo da inequação. • Menu de Contexto: Associe a um Nome $>f$	
• Insira o lado direito da inequação. • Menu de Contexto: Associe a um Nome $>g$	
Insira e resolva a inequação	
• Escreva a inequação $f \leq g$ • Menu de Contexto: Resolver $>$ Resolver	
Calcule a coordenada x da interseção	
• Escreva a igualdade $f = g$ e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Resolver $>$ Resolver	
Obtenha a Figura 7.5.1	
• Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos $>$ Construtor de Gráficos Faça $-2 \leq x \leq 2$ Opções: Imagem $>$ $-10 \leq y \leq 10$ • Arraste e solte o número 7 no gráfico de $f(x)$	

▼ 7.5 - Solução via Comandos do Maple

Associe o lado esquerdo da inequação ao nome f	$> f := \frac{2}{x} - 1$
Associe o lado direito da inequação ao nome g	$> g := 7$
Resolva a inequação.	$> solve(f \leq g, \{x\})$
	$>$

Resolva a interseção de $f(x)$ e $g(x)$	> <code>solve(f=g, x)</code>
Obtenha a Figura 7.5.1	> <code>plot([f, g], x=-2..2, y=-10..10, color=[black, red])</code>

Problema 7.6

7.6 - Solução Matemática

A solução analítica da inequação

$$\left| \frac{2}{x} - 1 \right| \leq 7$$

deve ser dividida em dois casos:

$\frac{2}{x} - 1 < 0$ colocando x em $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

e
 $\frac{2}{x} - 1 > 0$ colocando x em $(0, 2)$

A inequação $\frac{2}{x} - 1 < 0$ é resolvida resolvida pela sua transformação em

$$\frac{2}{x} < 1$$

com a adição de 1 em ambos os lados, resultando na dicotomia

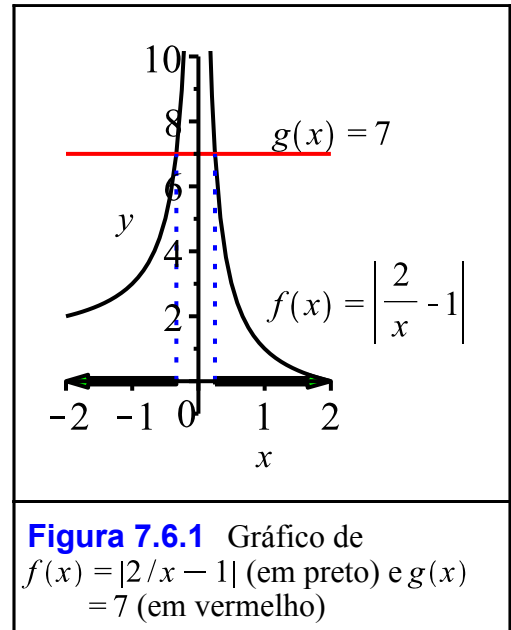
$$x < 0 \Rightarrow 2 > x \text{ ou } (-\infty, 2) \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0)$$

$$x > 0 \Rightarrow 2 < x \text{ ou } (2, \infty) \cap (0, \infty) = (2, \infty)$$

A inequação $\frac{2}{x} - 1 > 0$ pode ser resolvida pela sua transformação em $\frac{2}{x} > 1$, com a adição de 1 em ambos os lados, resultando na dicotomia

$$x < 0 \Rightarrow 2 < x \text{ ou } (2, \infty) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$$

$$x > 0 \Rightarrow 2 > x \text{ ou } (-\infty, 2) \cap (0, \infty) = (0, 2)$$



▼ *Caso 1: $\frac{2}{x} - 1$ é Negativa*

Se $\frac{2}{x} - 1 < 0$, tal que x encontra-se em $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, então a inequação original torna-se

$$-\left(\frac{2}{x} - 1\right) \leq 7$$

ou

$$1 - \frac{2}{x} \leq 7$$

que pode, ainda, ser manipulada, resultando

$$-6 \leq \frac{2}{x}$$

ou

$$-3 \leq \frac{1}{x}$$

Quando x encontra-se no intervalo $(-\infty, 0)$, esta inequação torna-se

$$-3x > 1$$

tal que

$$x \leq -\frac{1}{3}$$

Estes cálculos adicionam o intervalo $(-\infty, 0) \cap \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) = \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ ao

conjunto solução. Contudo, em $x = -\frac{1}{3}$ a inequação original torna-se

$$|-6 - 1| \leq 7 \quad \textbf{(5.6.1.1.1)}$$

de forma que $x = -\frac{1}{3}$ encontra-se no conjunto solução. Portanto, o intervalo pode ser escrito como $(-\infty, -\frac{1}{3}]$.

Quando x é dado no intervalo $(2, \infty)$, a inequação $-3 \leq \frac{1}{x}$ torna-se $-3x \leq 1$, tal que $x > -\frac{1}{3}$. A **interseção** dos **intervalos** $(2, \infty)$ e $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$ é o intervalo $(2, \infty)$. Contudo, em $x = 2$, a inequação original torna-se $|1 - 1| \leq 7$, tal que $x = 2$ encontra-se no conjunto solução. Sendo assim, escrevemos este último intervalo como $[2, \infty)$.

▼ *Caso 2: $\frac{2}{x} - 1$ é Positiva*

Se $\frac{2}{x} - 1 > 0$ tal que x está em $(0, 2)$, então a inequação original se torna

$$\frac{2}{x} - 1 \leq 7$$

ou

$$\frac{2}{x} \leq 8$$

ou mesmo

$$\frac{1}{x} \leq 4$$

Como x é positivo no intervalo $(0, 2)$, esta última inequação se torna

$$1 \leq 4x$$

e então

$$1/4 \leq x$$

Portanto, o conjunto solução é aumentado pela intersecção $(0, 2) \cap (1/4, \infty) = (1/4, 2)$.

A solução completa da inequação original contém, agora, os intervalos $(-\infty, -\frac{1}{3}]$, $(\frac{1}{4}, 2)$, e $[2, \infty)$. Em $x = \frac{1}{4}$, a inequação original torna-se $|8 - 1| \leq 7$, de forma que o ponto $x = \frac{1}{4}$ é adicionado ao conjunto solução e a solução completa é, então, a união $(-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{4}, \infty)$ sobre a reta real.

A Figura 7.6.1 destaca o conjunto solução $(-\infty, -1/3] \cup [1/4, \infty)$ com setas verdes. Estes são os valores de x para os quais o gráfico de $f(x)$ está abaixo do gráfico de $g(x)$.

▼ 7.6 - Solução via Maplet

A inequação

$$\left| \frac{2}{x} - 1 \right| \leq 7$$

pode ser resolvida com [Tutorial Inequações #1](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 7.6.2.

O lado esquerdo da inequação é inserido como $f(x)$ e o lado direito como $g(x)$. Entre estas duas funções há botões de seleção, para a



escolha da forma apropriada da inequação.

Clicando no botão **Gráfico** gera o gráfico de $f(x)$ (em preto), e $g(x)$ (em vermelho).

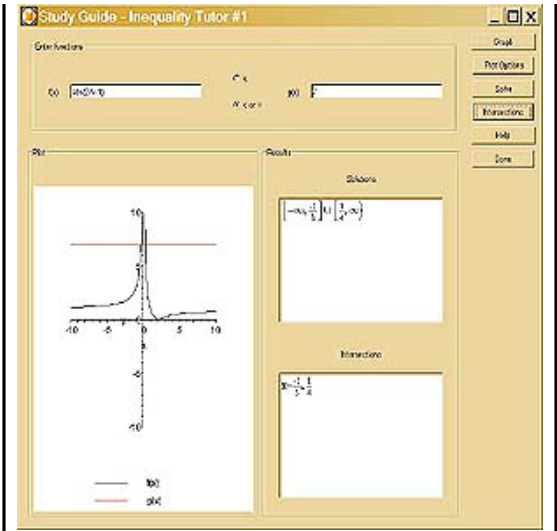


Figura 7.6.2 Imagem do Tutorial Inequações #1

O botão **Opções de Gráficos** nos permite controlar os eixos do gráfico.

Graficamente, a solução da inequação apresentada consiste nos valores de x para os quais a linha preta (ou seja, $f(x)$) encontra-se abaixo da linha vermelha (ou seja, $g(x)$). Claramente, isto ocorre na interseção mas à esquerda da curva com a reta horizontal e a sua esquerda, assim como na interseção mais à direita da curva com a reta horizontal e a sua direita.

Clicar sobre o botão **Interseções**, resulta $x = -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, as abscissas dos pontos de interseção.

Ao clicar-se sobre o botão **Resolver**, obtém-se a solução da inequação na forma de uma união de intervalos, ou seja,

$$(-\infty, -1/3] \cup [1/4, \infty)$$

Para iniciar o **Tutorial Inequações #1**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Inequações #1](#).

7.6 - Solução Interativa

Insira os dados para o problema	
• Insira o lado esquerdo da inequação. O modelo valor absoluto pode ser encontrado na paleta Layout, ou pode ser inserida do teclado usando a barra vertical: • Menu de Contexto: Associe a um Nome $>f$	
• Insira o lado direito da inequação. •	

• Menu de Contexto: Associe a um Nome > g	
Insira e resolva a inequação	
• Escreva a inequação $f \leq g$ • Menu de Contexto: Resolver > Resolver	
Calcule a coordenada x da interseção	
• Escreva a equação $f = g$ • Menu de Contexto: Resolver > Resolver	
Obtenha a Figura 7.6.1	
• Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos Faça $-2 \leq x \leq 2$ Opções: Imagem > $-1 \leq y \leq 10$ • Arraste e solte o número 7 no gráfico de $f(x)$	

▼ 7.6 - Solução via Comandos do Maple

Associe o lado esquerdo da inequação ao nome f	> $f := \left \frac{2}{x} - 1 \right $
Associe o lado direito da inequação ao nome g	> $g := 7$
Resolva a inequação.	> $\text{solve}(f \leq g, \{x\})$
Resolva a interseção $f(x)$ e $g(x)$	> $\text{solve}(f = g, x)$
Obtenha Figura 7.6.1	> $\text{plot}([f, g], x = -2 .. 2, y = -1 .. 10, \text{color} = [black, red])$

▼ Problema 7.7

▼ 7.7 - Solução Matemática

Para resolver a inequação

$$f(x) = \left| \frac{2}{x} - 1 \right| < |5x + 8| = g(x)$$

defina



$$F(x) = \frac{2}{x} - 1$$

$$G(x) = 5x + 8$$

e considere os seguintes quatro casos.

	$F(x) = \frac{2}{x} - 1$	$G(x) = 5x + 8$
Caso 1	Positivo	Positivo
Caso 2	Positivo	Negativo
Caso 3	Negativo	Positivo
Caso 4	Negativo	Negativo

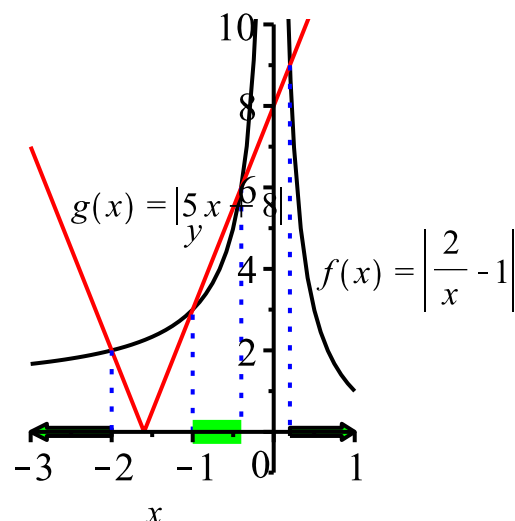


Figura 7.7.1 Gráfico de $|f(x)| = |2/x - 1|$ (em preto) e $|g(x)| = |5x + 8|$ (em vermelho)

▼ **Caso 1:** $F(x) > 0$ e $G(x) > 0$

Do Problema 7.6, $F(x) > 0$ para x no intervalo $(0, 2)$. Também, $G(x) > 0$ para $x > -8/5$ ou equivalentemente, x no intervalo $(-8/5, \infty)$. A interseção destes dois intervalos é o intervalo $(0, 2)$.

No Caso 1, a inequação original pode ser escrita como $F(x) < G(x)$, tendo-se

$$\frac{2}{x} - 1 < 5x + 8$$

ou

$$\frac{2}{x} < 5x + 9$$

Como x é positivo no intervalo comum $(0, 2)$, esta última inequação pode ser multiplicada por x sem que o sentido da inequação se altere. Portanto, tem-se

$$0 < 5x^2 + 9x - 2 = (5x - 1)(x + 2)$$

Por conseguinte, ambos os fatores devem ter o mesmo sinal. Se ambos forem positivos,

então tem-se $x > \frac{1}{5}$ e $x > -2$. Ambas as inequações são válidas no intervalo $\left(\frac{1}{5}, \infty\right)$.

Porém, $(0, 2) \cap \left(\frac{1}{5}, \infty\right) = \left(\frac{1}{5}, 2\right)$.

Se ambos os fatores forem negativos, teremos, então, $x < \frac{1}{5}$ e $x < -2$. Ambas as inequações são válidas no intervalo $(-\infty, -2)$, embora a interseção deste intervalo com $(0, 2)$ seja vazia.

▼ **Caso 2: $F(x) > 0$ e $G(x) < 0$**

Do Problema 7.6, $F(x) > 0$, para x no intervalo $(0, 2)$. Ainda, $G(x) < 0$, para $x < -\frac{8}{5}$ ou, equivalentemente, x no intervalo $\left(-\infty, -\frac{8}{5}\right)$. A interseção destes dois intervalos é vazia, de modo que não existem valores de x para os quais o Caso 2 se aplica.

▼ **Caso 3: $F(x) < 0$ e $G(x) > 0$**

Do Problema 7.6, $F(x) < 0$ se x estiver no intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. Ainda, $G(x) > 0$ para $x > -\frac{8}{5}$ ou, equivalentemente, x no intervalo $\left(-\frac{8}{5}, \infty\right)$. A interseção

$$\begin{aligned} & [(-\infty, 0) \cup (2, \infty)] \\ & \cap \left(-\frac{8}{5}, \infty\right) = \left[\left(-\frac{8}{5}, 0\right) \cup (2, \infty)\right] \end{aligned}$$

determina o domínio comum para as condições do Caso 3. Sob tais condições, a inequação original torna-se

$$-\left(\frac{2}{x} - 1\right) < 5x + 8$$

ou

$$-\frac{2}{x} < 5x + 7$$

Há dois subcasos a serem considerados. Se x estiver no intervalo $\left(-\frac{8}{5}, 0\right)$, então este será negativo, e a última inequação tomará a forma:

$$-2 > 5x^2 + 7x$$

ou

$$0 > 5x^2 + 7x + 2$$

ou, ainda,

$$0 > (5x + 2)(x + 1)$$

Os dois fatores devem possuir sinais opostos. Se $5x + 2 > 0$, enquanto $x + 1 < 0$, então

$x > -\frac{2}{5}$ e $x < -1$ não possuem interseção comum e a solução neste caso é vazia. Se, em vez disso, $5x + 2 < 0$ e $3x + 1 > 0$, então $x < -\frac{2}{5}$ e $x > -1$ são ambas satisfeitas no intervalo $\left(-1, -\frac{2}{5}\right)$, cujos membros formam um subconjunto daqueles que se encontram no intervalo $\left(-\frac{8}{5}, 0\right)$.

Por outro lado, se x estiver no intervalo $(2, \infty)$, tal que seja positivo, a inequação

$$-\frac{2}{x} < 5x + 7$$

torna-se

$$0 < 5x^2 + 7x + 2$$

ou

$$0 < (5x + 2)(x + 1) \quad (5.7.1.1.1)$$

Neste caso, ambos os fatores devem possuir o mesmo sinal. Se ambos forem negativos, tem-se que $x < -\frac{2}{5}$ e $x < -1$, são verdadeiras no intervalo $(-\infty, -1)$. Contudo, a interseção deste intervalo com $(2, \infty)$ é vazia. Se ambos os fatores forem positivos, tem-se que são $x > -\frac{2}{5}$ e $x > -1$ verdadeiras no intervalo $\left(-\frac{2}{5}, \infty\right)$. A interseção deste intervalo com $(2, \infty)$ resulta no intervalo $(2, \infty)$.

▼ **Caso 4:** $F(x) < 0$ e $G(x) < 0$

Do Problema 7.6, $F(x) < 0$ se x está no intervalo $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$. Também, $G(x) < 0$ para $x < -8/5$ ou equivalentemente, x no intervalo $(-\infty, -8/5)$. O domínio para o Caso 4 são então

$$((-\infty, 0) \cup (2, \infty)) \cap (-\infty, -8/5) = (-\infty, -8/5)$$

Neste intervalo comum, x é negativo, então a inequação

$$-\left(\frac{2}{x} - 1\right) < -(5x + 8)$$

se torna

$$\frac{2}{x} > 5x + 9$$

e então

$$2 < 5x^2 + 9x$$

e finalmente

$$0 < 5x^2 + 9x - 2 = (5x - 1)(x + 2)$$

Mais uma vez, ambos os fatores devem ser do mesmo sinal. Se ambos são positivos,

então $x > 1/5$ e $x > -2$ são verdadeiros no intervalo $(1/5, \infty)$. A interseção deste intervalo com $(-\infty, -8/5)$ é vazia. Se entretanto, ambos os fatores são negativos então $x < 1/5$ e $x < -2$, ambos de quais são verdadeiros no intervalo $(-\infty, -2)$. A interseção deste intervalo com $(-\infty, -8/5)$ é o intervalo $(-\infty, -2)$.

Do Caso 1 resulta o intervalo $\left(\frac{1}{5}, 2\right)$.

Do Caso 3 resultam os intervalos $\left(-1, -\frac{2}{5}\right)$ e $(2, \infty)$.

Para o Caso 4, obteve-se o intervalo $(-\infty, -2)$.

Em $x = 2$, a inequação original torna-se $|0| < |18|$, de forma que $x = 2$ encontra-se no conjunto solução. Portanto, a solução pode ser escrita como

$$(-\infty, -2) \cup (-1, -2/5) \cup (1/5, \infty)$$

A Figura 7.7.1 destaca o conjunto solução $(-\infty, -2) \cup (-1, -2/5) \cup (1/5, \infty)$ com setas verdes. Estes são os valores de x para os quais o gráfico de $f(x)$ está abaixo do gráfico de $g(x)$.

7.7 - Solução via Maplet

A inequação

$$\left|\frac{2}{x} - 1\right| < |5x + 8|$$

pode ser resolvida pelo [Tutorial Inequações #1](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 7.7.2.

O lado esquerdo da inequação é inserido como $f(x)$ e o lado direito como $g(x)$. Entre estas duas funções há botões de seleção, para a escolha da forma apropriada da inequação.

Clicando no botão **Gráfico** gera o gráfico de $f(x)$ (em preto), e $g(x)$ (em vermelho).

O botão **Opções de Gráficos** nos permite controlar os eixos do gráfico.

Graficamente, a solução da inequação apresentada consiste nos valores de x para os quais a linha preta (ou seja, $f(x)$) encontra-se abaixo da linha vermelha (ou seja, $g(x)$). Visivelmente, esta encontra-se à esquerda da interseção entre as duas retas.

Ao clicar-se sobre o botão **Interseções**, obtém-se $x = -2, -1, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}$, as abscissas dos

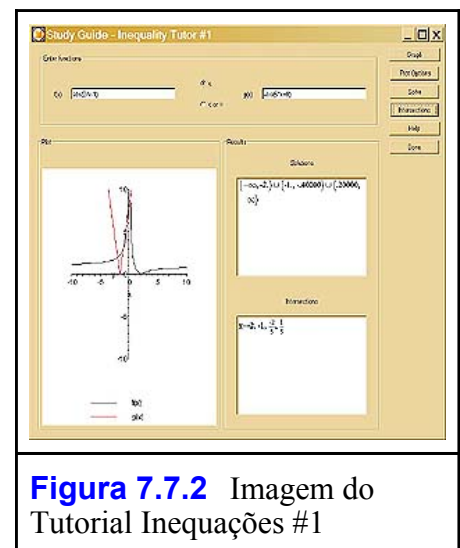


Figura 7.7.2 Imagem do Tutorial Inequações #1

pontos de interseção.

Ao clicar-se sobre o botão **Resolver**, obtém-se a solução da inequação na forma de uma união de intervalos, ou seja,

$$(-\infty, -2) \cup (-1, -2/5) \cup (1/5, \infty)$$

Para iniciar o **Tutorial de Inequações #1**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Inequações #1](#).

▼ 7.7 - Solução Interativa

Insira os dados para o problema	
• Insira o lado esquerdo da inequação. O modelo valor absoluto pode ser encontrado na paleta Layout, ou pode ser inserida do teclado usando a barra vertical: • Menu de Contexto: Associe a um Nome > f	
• Insira o lado direito da inequação. O modelo valor absoluto pode ser encontrado na paleta Layout, ou pode ser inserida do teclado usando a barra vertical: • Menu de Contexto: Associe a um Nome > g	
Insira e resolva a inequação	
• Escreva a inequação $f < g$ • Menu de Contexto: Resolver > Resolver	
Calcule a coordenada x da interseção	
• Escreva a equação $f = g$ • Menu de Contexto: Resolver > Resolver	
Obtain Figure 1.7.1	
• Digite f e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos Faça $-3 \leq x \leq 1$ Opções: Imagem > $-1 \leq y \leq 10$ • Arraste e solte $g(x)$ no gráfico de $f(x)$	

▼ 7.7 - Solução via Comandos do Maple

Associe o lado esquerdo da inequação ao nome f	$> f := \left \frac{2}{x} - 1 \right $
Associe o lado direito da inequação ao nome g	$> g := 5x + 8 $
Resolva a inequação.	$> solve(f < g, \{x\})$
Resolva a interseção de $f(x)$ e $g(x)$	$> solve(f = g, x)$
Obtenha a Figura 7.7.1	$> plot([f, g], x = -3 .. 1, y = -1 .. 10, color = [black, red])$

Problema 7.8

7.8 - Solução Matemática

Para resolver a inequação

$$5 \leq \left| \frac{2}{x} - 1 \right|$$

defina $G(x) = \frac{2}{x} - 1$. (Note que isto é $F(x)$ no Problema 7.7) Dos Problemas 7.6 e 7.7,

$$G(x) > 0 \text{ para } x \text{ em } (0, 2)$$

$$G(x) < 0 \text{ para } x \text{ em } (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

Se $G(x) > 0$, a inequação dada se torna

$$5 \leq \frac{2}{x} - 1$$

ou

$$3 < \frac{1}{x}$$

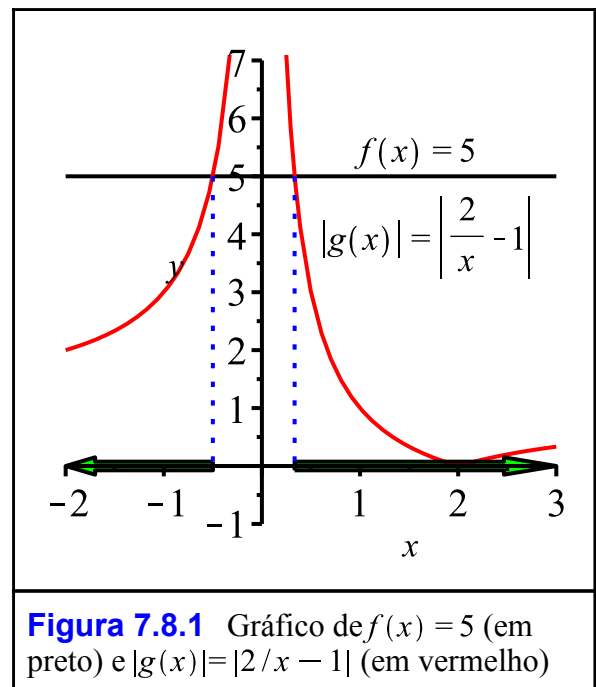
Como x é positivo, neste caso, tem-se, ainda

$$3x < 1$$

ou

$$x < 1/3$$

Daí, determina-se o intervalo $(-\infty, 1/3)$ cuja interseção com $(0, 2)$ é o intervalo $(0, 1/3)$.



Se $G(x) < 0$, a dada inequação se torna

$$5 \leq -\left(\frac{2}{x} - 1\right)$$

ou

$$5 \leq 1 - \frac{2}{x}$$

e ainda

$$2 \leq -\frac{1}{x}$$

Se x estiver no intervalo $(2, \infty)$, tal que seja positivo, a última inequação torna-se

$$2x \leq -1$$

e $x \leq -\frac{1}{2}$, contradizendo a exigência de que x deve ser positivo. Portanto, não há solução no intervalo $(2, \infty)$.

Se x estiver no intervalo $(-\infty, 0)$, tal que seja negativo, então a inequação

$$2 \leq -\frac{1}{x}$$

se torna

$$2x \geq -1$$

de forma que $x > -\frac{1}{2}$. A interseção do intervalo $[-\frac{1}{2}, \infty)$ com $(-\infty, 0)$ é nada mais que $[-\frac{1}{2}, 0)$.

A Figura 7.8.1 destaca o conjunto solução $[-1/2, 0) \cup (0, 1/3]$ com setas verdes. Estes são os valores de x para os quais o gráfico de $f(x)$ está abaixo do gráfico de $g(x)$.

▼ 7.8 - Solução via Maplet

A inequação

$$5 \leq \left| \frac{2}{x} - 1 \right|$$

pode ser resolvida com o [Tutorial Inequações #1](#).

Ao se clicar sobre este link o tutorial com a solução será iniciado como mostrado na Figura 7.8.2.

O lado esquerdo da inequação é inserido como



$f(x)$ e o lado direito como $g(x)$. Entre estas duas funções há botões de seleção, para a escolha da forma apropriada da inequação.

Clicando no botão **Gráfico** gera o gráfico de $f(x)$ (em preto), e $g(x)$ (em vermelho).

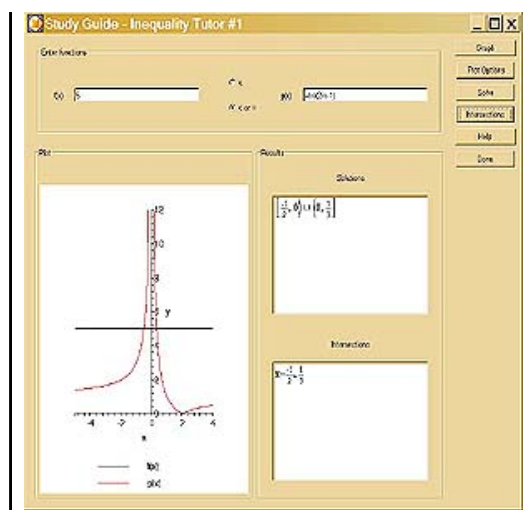


Figura 7.8.2 Imagem do Tutorial Inequações #1

O botão **Opções de Gráficos** nos permite controlar os eixos do gráfico.

Graficamente, a solução da inequação apresentada consiste nos valores de x para os quais a linha preta (ou seja, $f(x)$) encontra-se abaixo da linha vermelha (ou seja, $g(x)$). Visivelmente, esta encontra-se à esquerda da interseção entre as duas retas.

Ao clicar-se sobre o botão **Interseções**, obtém-se $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, as **abscissas** dos pontos de interseção.

Ao clicar-se sobre o botão **Resolver**, obtém-se a solução da inequação na forma de uma **união** de **intervalos**, ou seja,

$$[-1/2, 0) \cup (0, 1/3]$$

(Há dois intervalos devido à **assíntota** vertical em $x = 0$.)

Para iniciar o **Tutorial de Inequações #1**, deve-se clicar sobre o link: [Tutorial Inequações #1](#).

7.8 - Solução Interativa

Insira os dados para o problema	
- Insira o lado esquerdo da inequação. - Menu de Contexto: Associe a um Nome $>f$	
Insira o lado direito da inequação. O modelo valor absoluto pode ser encontrado na paleta Layout, ou pode	

ser inserida do teclado usando a barra vertical: • Menu de Contexto: Associe a um Nome > G	
Insira e resolva a inequação	
• Escreva a inequação $f \leq G$ • Menu de Contexto: Resolver > Resolver	
Calcule a coordenada x da interseção	
• Escreva a equação $f = G$ • Menu de Contexto: Resolver > Resolver	
Obtenha Figura 7.8.1	
• Digite G e pressione a tecla Enter. • Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos Faça $-2 \leq x \leq 3$ Opções: Imagem > $-1 \leq y \leq 7$ • Arraste e solte o número 5 no gráfico de $G(x)$	

▼ 7.8 - Solução via Comandos do Maple

Associe o lado esquerdo da inequação ao nome f	> $f := 5$
Associe o lado direito da inequação ao nome g	> $g := \left \frac{2}{x} - 1 \right $
Resolva a inequação.	> $\text{solve}(f < g, \{x\})$
Resolva a interseção de $f(x)$ e $g(x)$	> $\text{solve}(f = g, x)$
Obtenha a Figura 7.8.1	> $\text{plot}([f, g], x = -2 .. 3, y = -1 .. 7, color = [black, red])$

▼ Problema 7.9

▼ 7.9 - Solução Matemática

A inequação

$$3 < 2x - 3 < 7$$

pode ser resolvida adicionando-se, inicialmente, 3 a cada membro, de forma a obter-se

$$6 < 2x < 10$$

de onde

$$3 < x < 5$$

segue por divisão por 2. Então x deve estar em um intervalo aberto $(3, 5)$.

A Figura 7.9.1 destaca o conjunto solução $3 < x < 5$ com setas verdes. Estes são os valores de x para os quais o gráfico de $f(x)$ está entre as linhas $m(x) = 3$ e $M(x) = 7$.

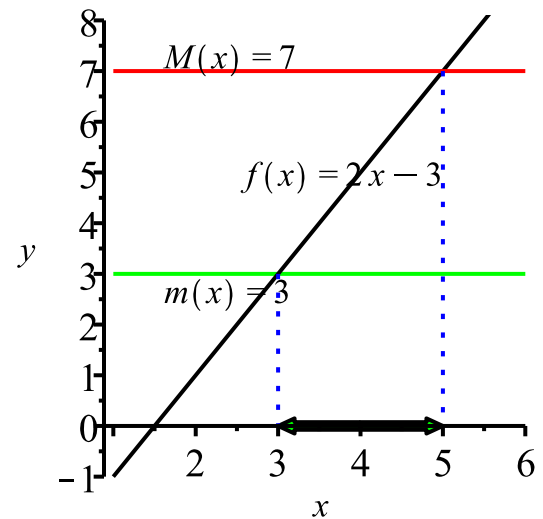


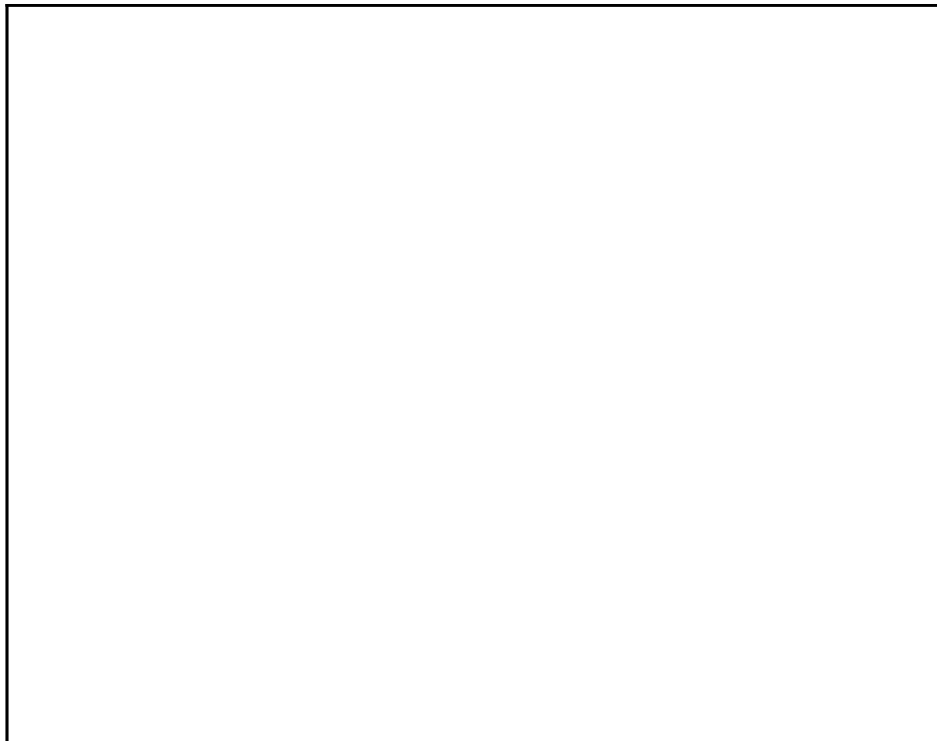
Figura 7.9.1 Gráfico de $m = 3$ (em verde), $M = 7$ (em vermelho), e $f(x) = 2x - 3$ (em preto)

▼ 7.9 - Solução via Maplet

A inequação

$$3 < 2x - 3 < 7$$

pode ser resolvida por meio do [Tutorial Inequações #2](#) como mostrado pela Figura 7.9.2.



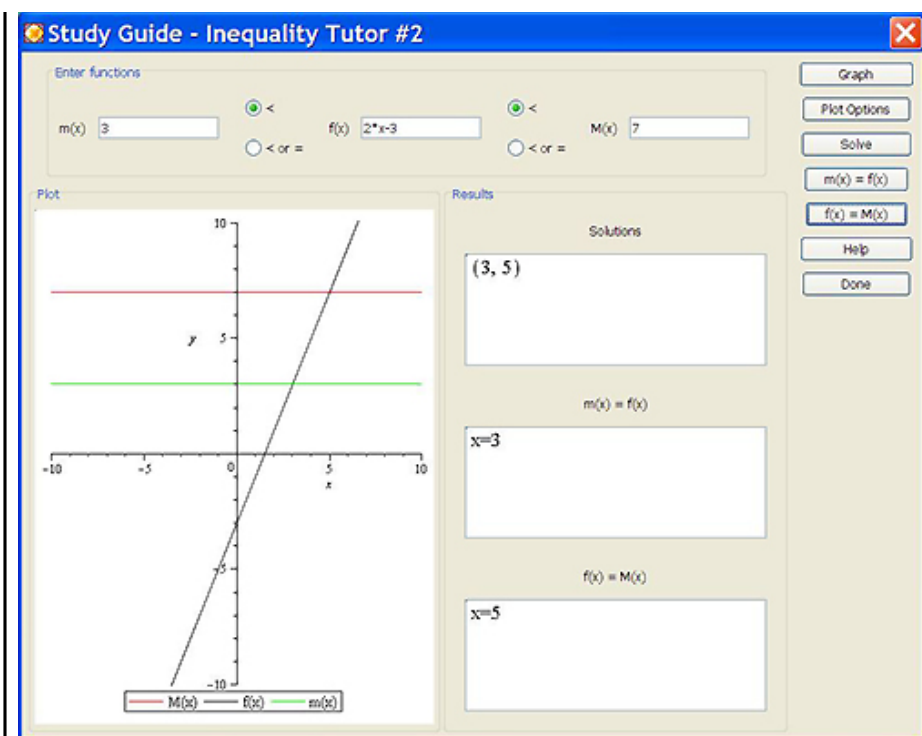


Figura 7.9.2 Solução da inequação $3 < 2x - 3 < 7$ pelo Tutor Inequações #2

O lado esquerdo da inequação é inserido como $m(x)$, o meio como $f(x)$, e o lado direito como $M(x)$. Entre cada caixa de entrada há botões de seleção para a escolha da forma apropriada da inequação.

Clicando no botão **Gráfico** gera o gráfico de $f(x)$ (em preto), e as retas horizontais $y = a$, $y = b$ em verde e vermelho, respectivamente.

O botão **Opções de Gráficos** nos permite controlar os eixos do gráfico.

Graficamente, a solução da inequação dada consiste nos valores de x para os quais a linha preta (ou seja, $f(x)$) encontra-se entre a linha vermelha (ou seja, $M(x)$) e a linha verde (ou seja, $m(x)$). Claramente, isto ocorre entre as interseções da linha preta com as duas linhas horizontais.

Ao clicar-se sobre o botão $m(x) = f(x)$, obtém-se $x = 3$, a abscissa do ponto de interseção das linhas preta e verde.

Ao clicar-se sobre o botão $f(x) = M(x)$, obtém-se $x = 5$, a abscissa do ponto de interseção das linhas preta e vermelha.

Ao clicar-se sobre o botão **Resolver**, é gerada a solução da inequação na forma de um intervalo, ou seja, $(3, 5)$.

Para Iniciar o **Tutorial Inequações #2**, clique no seguinte link: [Tutorial Inequações #2](#)

- A inequação $3 < 2x - 3 < 7$ implica as duas inequações separadas $3 < 2x - 3 \quad \text{e} \quad 2x - 3 < 7$ - Forme uma sequência destas duas inequações. - Menu de Contexto: Mapear Comando Em "Mapeie o comando" > res "Associe o argumento" > $\{x\}$	
Obtenha a Figura 7.9.1	
- Insira a expressão $2x - 3$ - Menu de Contexto: Gráficos > Construtor de Gráficos - Solte os números 3 e 7 no gráfico	

▼ 7.9 - Solução via Comandos do Maple

Insira as duas inequações separadas implícitas na dada inequação, $3 < 2x - 3 < 7$	> $q := \{3 < 2x - 3, 2x - 3 < 7\}$
Resolva o par de inequações	> $solve(q, \{x\})$
Obtenha a Figura 7.9.1.	> $plot([3, 2x - 3, 7], x = 1 .. 6, color = [green, black, red])$

▼ Problema 7.10

▼ 7.10 - Solução Matemática

Para resolver a inequação

$$3 < \left| \frac{2}{x} - 1 \right| < 7$$

defina $F(x) = \frac{2}{x} - 1$ como no Problema 7.7.

Dos Problemas 7.6 e 7.7,

$$F(x) > 0 \text{ para } x \text{ em } (0, 2)$$



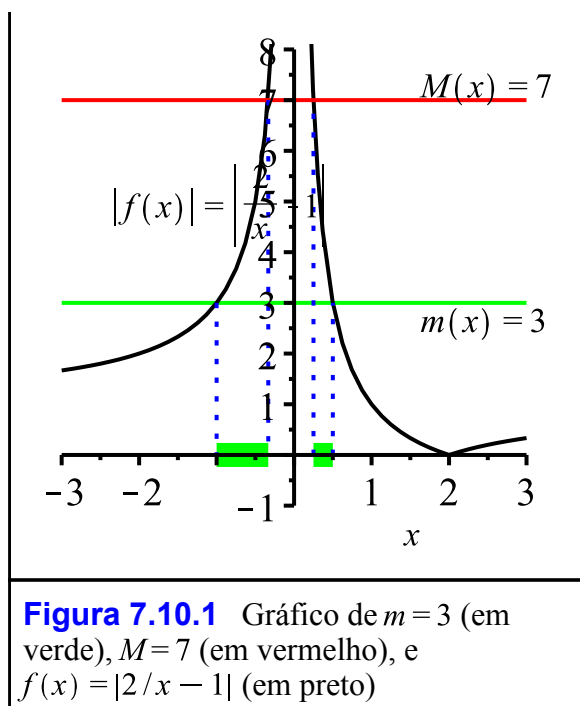
$F(x) < 0$ para x em $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

Se $F(x) > 0$, a inequação dada se torna

$$3 < \frac{2}{x} - 1 < 7$$

ou

$$4 < \frac{2}{x} < 8$$



Para quantidades positivas, a reciprocidade reverte o sentido da inequação. Portanto, tem-se

$$\frac{1}{4} > \frac{x}{2} > \frac{1}{8}$$

ou, multiplicando por 2,

$$\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$$

Se $F(x) < 0$, a dada inequação se torna

$$3 < -\left(\frac{2}{x} - 1\right) < 7$$

ou

$$3 < 1 - \frac{2}{x} < 7$$

e então

$$2 < -\frac{2}{x} < 6$$

Se x estiver no intervalo $(2, \infty)$, tal que seja positivo, então esta inequação não é satisfeita para nenhum outro x , uma vez que seria necessário que um número negativo fosse limitado por dois números positivos.

Se x estiver no intervalo $(-\infty, 0)$, tal que seja negativo, então a inequação

$$2 < -\frac{2}{x} < 6$$

ou equivalentemente,

$$1 < -\frac{1}{x} < 3$$

pode ser transformada em sua recíproca, uma vez que o termo do meio é positivo. Neste caso, o sentido das inequações será invertido, resultando

$$1 > -x > \frac{1}{3}$$

Multiplicando a inequação por -1 , obtém-se

$$-1 < x < -1/3$$

Na forma de intervalos, a solução completa é dada pela união $(-1, -1/3) \cup (1/4, 1/2)$.

A Figura 7.10.1 destaca o conjunto solução em verde. Estes são os valores de x para os quais o gráfico de $f(x) = |F(x)|$ está entre as retas $m(x) = 3$ e $M(x) = 7$.

7.10 - Solução via Maplet

A inequação

$$3 < \left| \frac{2}{x} - 1 \right| < 7$$

pode ser resolvida por meio do [Tutorial Inequações #2](#), como mostrado pela Figura 7.10.2.

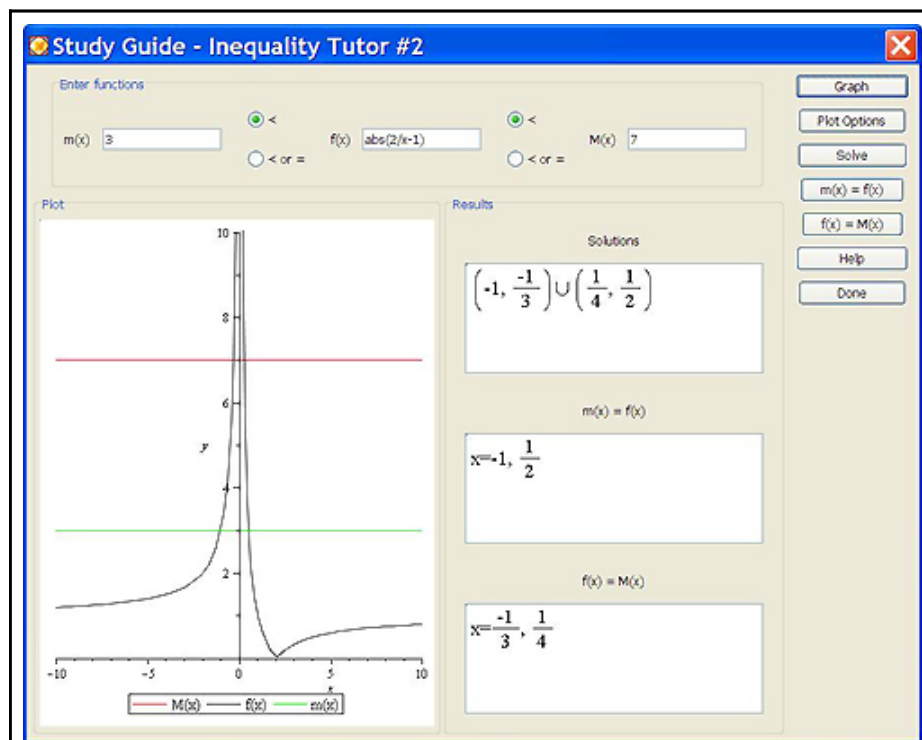


Figura 7.10.2 Solução da inequação $3 < \left| \frac{2}{x} - 1 \right| < 7$ pelo Tutorial Inequações #2

O lado esquerdo da inequação é inserido como $m(x)$, o meio como $f(x)$, e o lado direito como $M(x)$. Entre cada caixa de entrada há botões de seleção para a escolha da forma apropriada da inequação.

Clicando no botão **Gráfico** gera o gráfico de $f(x)$ (em preto), e as retas horizontais $y = a$, $y = b$ em verde e vermelho, respectivamente.

O botão **Opções de Gráficos** nos permite controlar os eixos do gráfico. Por estes motivos, o eixo vertical na Figura 7.10.2 foi ajustada para $0 \leq y \leq 10$.

Graficamente, a solução da inequação dada consiste nos valores de x para os quais a linha preta (ou seja, $f(x)$) encontra-se entre a linha vermelha (ou seja, $M(x)$) e a linha verde (ou seja, $m(x)$). Exceto para $x = 0$, isto ocorre entre as interseções da curva preta com as duas retas horizontais.

Ao clicar-se sobre o botão $m(x) = f(x)$, obtém-se $x = -1, \frac{1}{2}$, as abscissas dos pontos de interseção da curva preta e das retas em verde.

Ao clicar-se sobre o botão $f(x) = M(x)$, obtém-se $x = -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, as abscissas dos pontos de interseção da curva preta e das retas em vermelho.

Ao clicar-se sobre o botão **Resolver**, obtém-se a inequação na forma de uma união de intervalos, ou seja,

$$(-1, -1/3) \cup (1/4, 1/2)$$

Para Iniciar o **Tutorial Inequações #2**, clique no seguinte link: [Tutorial Inequações #2](#).

▼ 7.10 - Solução Interativa

• Insira o "meio" da inequação. O modelo valor absoluto pode ser encontrado na paleta Layout, ou pode ser inserida do teclado usando a barra vertical: • Menu de Contexto: Associe a um Nome $>f$	
• Forme uma sequência das duas inequações $3 < f \text{ e } f < 7$ implicadas pela dada inequação $3 < f < 7$ • Menu de Contexto: Mapear Comando em "Mapeie o comando" $>$ resolva "Associe o argumento" $>$ $\{x\}$	
Obtenha a Figura 7.10.1	

- Digite f e pressione a tecla Enter.
- Menu de Contexto:
Gráficos > Construtor de Gráficos
- Solte os números 3 e 7 no gráfico

▼ 7.10 - Solução via Comandos do Maple

Insira as duas inequações implícitas na dada inequação, $3 < \left \frac{2}{x} - 1 \right < 7$	> $q := \left\{ 3 < \left \frac{2}{x} - 1 \right , \left \frac{2}{x} - 1 \right < 7 \right\}$
Resolva o par de inequações	> $\text{solve}(q, \{x\})$
Obtenha a Figura 7.10.1.	> $\text{plot}\left(\left[3, \left \frac{2}{x} - 1 \right , 7\right], x = -3 \dots 3, y = -1 \dots 8, \text{color} = [\text{green}, \text{black}, \text{red}]\right)$

▼ Exercícios - Capítulo 7

Resolver cada uma das seguintes inequações.

7.1. $2 + 5x \leq 7$

7.2. $|9x - 5| > 4$

7.3. $|5 + 7x| < |4x - 9|$

7.4. $|8x - 9| \leq 5$

7.5. $3 + \frac{5}{x} < 8$

7.6. $\left| 3 + \frac{5}{x} \right| \leq 6$

7.7. $\left| 3 + \frac{5}{x} \right| < |2x - 9|$

7.8. $\left| 3 + \frac{5}{x} \right| > 1$

7.9. $4 < 5x - 3 < 11$

7.10. $2 \leq \left| 3 + \frac{5}{x} \right| < 9$

L

